

1. Анықтамасы

Соболев кеңістігі – бұл функциялар мен олардың слабы (weak) туындылары интегралдық түрде шектеулі болатын кеңістік.

Нотация: $W^{k,p}(\Omega)$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ашық домен
- $k \in \mathbb{N}_0$ – туындылардың реттігі
- $1 \leq p \leq \infty$ – L^p интегралдық нормасы

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

мұндағы:

- $D^\alpha u$ – слабы (weak) туынды мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ бойынша
- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

2. Негізгі норма

Соболев кеңістігі $W^{k,p}(\Omega)$ норма арқылы толық метрикалық кеңістік болады:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$p = \infty$ үшін:

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

3. Слабы туынды (weak derivative)

Функция u слабы k -ретті туындысы $D^\alpha u$ бар деп аталады, егер барлық тегіс тест функциялар $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ үшін:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D^\alpha u) \varphi \, dx$$

- Бұл классикалық туынды болмауы мүмкін функцияларға да туынды ұғымын енгізуге мүмкіндік береді.

4. Негізгі мысалдар

1. $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$
2. $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ – Гильберт кеңістігі, ең көп кездесетін Соболев кеңістігі
3. $C^\infty(\bar{\Omega}) \subset W^{k,p}(\Omega)$ (барлық үздіксіз туындылары бар функциялар)

5. Негізгі қасиеттері

1. Линиялықдық: $W^{k,p}(\Omega)$ линейлы кеңістік
2. Тұрақтылық: $\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{W^{k,p}}$
3. Компакттық кірістер: егер Ω шектеулі және регулярлы, онда Rellich-Kondrachov теоремасы бойынша $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ компакттық инъекция бар.
4. Тест функцияларының тығыздығы: $C_c^\infty(\Omega)$ тығыз Sobolev кеңістігінде $W_0^{k,p}(\Omega)$

1. Пуанкаре теңсіздігінің формуласы

Домен $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ шектеулі және регулярлы болсын. Егер $u \in H_0^1(\Omega)$ болса (яғни $u = 0$ шекарада), онда Пуанкаре теңсіздігі былай жазылады:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

- Мұндағы $C_P > 0$ – доменге байланысты тұрақты коэффициент.
 - $\|\cdot\|_{L^2} - L^2(\Omega)$ нормасы.
 - Бұл теңсіздік Sobolev кеңістіктерінің маңызды қасиеттерінің бірі болып табылады.
-

2. Идея

- Теңсіздік айтады: шекарадағы нөлдік шарт арқылы функцияның мәні градиентіне (туындысына) бақыланады.
 - Физикалық тұрғыдан: егер u нөлге шектелсе, оның «үлкен мәндері» градиентінің «үлкендігіне» байланысты болады.
-

3. Дәлелдеме (қарапайым жағдайда, $\Omega = (0, L)$, бір өлшем)

Домен: $\Omega = (0, L)$, $u \in H_0^1(0, L)$, яғни $u(0) = u(L) = 0$.

Дәлелдеу:

1. Фундаментальды теңдеуді интегралдау арқылы:

$$u(x) = \int_0^x u'(s) ds$$

2. Квадраттап, Коши–Буняковский–Шварц теңсіздігін қолданамыз:

$$|u(x)|^2 = \left| \int_0^x u'(s) ds \right|^2 \leq \left(\int_0^x 1^2 ds \right) \left(\int_0^x |u'(s)|^2 ds \right) = x \int_0^x |u'(s)|^2 ds$$

3. Енді $x \in [0, L]$ бойынша интегралдаймыз:

$$\int_0^L |u(x)|^2 dx \leq \int_0^L x dx \int_0^L |u'(s)|^2 ds = \frac{L^2}{2} \int_0^L |u'(s)|^2 ds$$

4. Сондықтан, 1D үшін Пуанкаре теңсіздігі:

$$\boxed{\|u\|_{L^2(0,L)} \leq \frac{L}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(0,L)}}.$$

- Мұндағы $C_P = L/\sqrt{2}$.
-

4. Жалпы жағдайда (n өлшемді домен)

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ шектеулі және Lipschitz шекаралы болса, онда Пуанкаре теңсіздігі:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

- Дәлелдеу идеясы:

1. Доменді жол бойынша бөлшектеу (функцияны бір өлшемдік кесінділер бойынша қарастыру)
2. 1D теңсіздікті қолдану
3. Интегралдау арқылы барлық өлшемге тарату

1. Теореманың формулировкасы

Теорема (Rellich–Kondrachov, қарапайым нұсқа).

Домен $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ шектеулі, Lipschitz шекаралы болсын. Егер $1 \leq p < n$ және $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$, онда:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

яғни, компакты енгізу бар.

- $W^{1,p}(\Omega)$ – Sobolev кеңістігі
- $\hookrightarrow$ – компактiлi енгізу

Арнайы жағдай: $p = 2$, $H_0^1(\Omega)$ кеңістігі $L^2(\Omega)$ -ге компактiлi енгізіледі.

2. Дәлелдеме идеясы (қарапайым 1D және негізгі идея)

Мақсат: Көрсетейік, егер $\{u_k\}$ шектеулі $W^{1,p}(\Omega)$ -тізбек болса, онда $L^q(\Omega)$ -тізбекте субтізбек конвергентті болады.

2.1. 1D доменде ($\Omega = (0, L)$)

1. $u \in W^{1,p}(0, L)$ болса, онда функция Hölder тұрақтылыққа ие:

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_y^x |u'(s)| ds \leq |x - y|^{1-1/p} \|u'\|_{L^p(0,L)}$$

- Бұл Arzelà–Ascoli критерийіне сай келеді: шектеулі және теңбіркелкі үздіксіздік береді.
2. Сондықтан, шектеулі тізбек $\{u_k\}$ үшін субтізбек $\{u_{k_j}\}$ Ω -да $C([0, L])$ -да конвергентті болады.
 3. L^q -норма $C([0, L])$ -конвергенциядан шығады: $u_{k_j} \rightarrow u$ $L^q(0, L)$ -де.

✓ 1D-де компактiлi енгізу дәлелденді.

2.2. Жалпы n -өлшемде ($n \geq 1$)

1. Lipschitz доменді торларға бөлу:
 - Ω торларға бөлінеді, әрбір тор 1D секілді қаралады.
2. Постоянная Hölder-үздіксіздік:
 - Шектеулі Sobolev нормасы $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq C$ арқылы орнатылған.
3. Fréchet–Kolmogorov критерийі:
 - Тізбек L^q -де компактiлi болу үшін:
 - Тізбек шектеулі
 - Орнын ауыстыру бойынша теңсіздік азаяды (translation control)
 - Sobolev нормалары бұл шарттарды қамтамасыз етеді.
4. Субтізбек алу:
 - Тізбектен L^q -конвергентті субтізбек $\{u_{k_j}\}$ алынады.

✓ Бұл n -өлшемде Rellich–Kondrachov компактiлi енгізуді дәлелдейді.

1. Теореманың формулировкасы

Соболев енгізу теоремасы (Sobolev embedding theorem):

Домен $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ шектеулі және Lipschitz шекаралы болсын. Егер $1 \leq p < n$, онда:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*]$$

мұндағы

$$p^* = \frac{np}{n-p} \quad (\text{Соболев критикалық индекс})$$

- $p^* = \infty$ болса, $p \geq n$ үшін $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, Гельдер кеңістігіне енгізіледі.
- $\hookrightarrow$ – үздіксіз енгізу.

Мағынасы: Sobolev кеңістігінде шектеулі бір ретті туындысы бар функциялар L^q -ке «қозғалмай» енгізіледі.

2. Дәлелдеменің негізгі идеясы (1D және көп өлшемді)

2.1. 1D-дегі қарапайым дәлел

$\Omega = (0, L)$, $u \in W^{1,p}(0, L)$. Фундаментальды теорема бойынша:

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(s) ds$$

- Коши–Буняковский–Шварц теңсіздігі арқылы:

$$|u(x) - u(0)| \leq \int_0^L |u'(s)| ds \leq L^{1-1/p} \|u'\|_{L^p(0,L)}$$

- Осыдан Hölder тұрақтылық шығады: $u \in C^{0,\alpha}$, $\alpha = 1 - 1/p$.
- Сонымен қатар, L^q -норма үшін:

$$\|u\|_{L^q(0,L)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(0,L)}, \quad \forall 1 \leq q \leq \infty$$

✅ 1D үшін Sobolev embedding дәлелденді.

2.2. Жалпы n -өлшемде ($n \geq 1$)

Идея:

1. Ω шектеулі Lipschitz доменді торларға бөлу.
2. Hardy–Littlewood–Sobolev немесе Riesz потенциалдары арқылы әрбір бөлшекте 1D дәлелін жалпылаймыз.
3. Егер $1 \leq p < n$, онда Sobolev критикалық индекс:

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

- Бұл $L^q(\Omega)$ -ке енгізудің шекаралық мәні болып табылады.
4. Интегралдық есептеу арқылы:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad 1 \leq q \leq p^*$$

- Мұнда C – доменге байланысты тұрақты.

1. Пуассон теңдеуі мен шекаралық есеп

Домен $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ үшін Пуассон теңдеуі:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

мұндағы $f \in L^2(\Omega)$ — «көз» функциясы, u — шешім.

- Дәстүрлі шешім (classical solution) – $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ және $\Delta u = f$ барлық нүктелерде.
 - Кейде f немесе $\partial\Omega$ қатал болса, классикалық шешім болмауы мүмкін. Сол кезде **әлсіз шешім** қолданылады.
-

2. Әлсіз шешімнің анықтамасы

Функция $u \in H_0^1(\Omega)$ (Sobolev кеңістігі, бір ретті туындылары L^2 -де) **әлсіз шешім** деп аталады, егер:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

- Мұндағы v – барлық тест функциялары, яғни $H_0^1(\Omega)$ -де.
 - Әлсіз шешім – интегралдық формуланы қанағаттандыратын u .
-

3. Әлсіз шешімнің интерпретациясы

- Классикалық шешім бар болса, ол әлсіз шешім де болады.
 - Әлсіз шешім туынды классикалық тұрғыдан болмаған жағдайда де анықталады.
 - Лаплас оператор интеграл формасында «тестілеу» арқылы беріледі.
-

4. Вариациялық (weak) формула

- Әлсіз шешімді вариациялық формула деп те атайды:

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ such that } a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

мұндағы:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad l(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

- Бұл формула Лакса-Мильграм теоремасы (Lax-Milgram) арқылы шешілуі мүмкін.
-

5. Әлсіз шешімнің қасиеттері

1. Тұрақтылық: $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$
2. Уникалдық: $f \in L^2(\Omega)$ болса, әлсіз шешім бірегей
3. Линиялықдық: Әлсіз шешім сызықтық PDE үшін сызықтық болады
4. Sobolev кеңістігінде анықтылық: Әлсіз шешім классикалық туындылардың орнына **слабы** туындылар арқылы анықталады

1. Мәселенің қойылымы

Домен $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ үшін жылуөткізгіштік теңдеуі:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

- $u_0(x)$ – бастапқы шарт
 - $f(x, t)$ – көз функциясы
 - $u = u(x, t)$ – шешім
 - Шекаралық шарт: Дирихле (0 мәні)
-

2. Әлсіз шешімнің анықтамасы

Функция $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ және $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ болса, әлсіз шешім деп аталады, егер барлық тест функциялары $v \in H_0^1(\Omega)$ үшін:

$$\int_{\Omega} u_t(x, t)v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) dx, \quad \forall t \in (0, T)$$

- Бұл формула интегралдық түрде жылуөткізгіштік теңдеуінің слабая (weak) формасы болып табылады.
-

3. Әлсіз шешімнің интерпретациясы

1. Классикалық шешім бар болса, ол әлсіз шешім де болады.
 2. Әлсіз шешім классикалық туындылары болмаған жағдайда да анықталады.
 3. Әлсіз шешімнің вариациялық формуласы сандық әдістерге (FEM) негіз болады.
-

4. Вариациялық формула (weak formulation)

- Әлсіз шешім $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ ізделеді, осылайша:

$$(u_t(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(t), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u(0) = u_0$$

мұндағы $(\cdot, \cdot) - L^2(\Omega)$ скалярлық көбейтіндісі.

5. Әлсіз шешімнің қасиеттері

1. Уникалдық және тұрақтылық:

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds \leq C(\|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2}^2 ds)$$

2. Линиялықдық: Егер f және u_0 сызықтық болса, u да сызықтық.
 3. Слабы туындылар арқылы анықтылық: ∇u және u_t классикалық түрде болмауы мүмкін, бірақ әлсіз формула бойынша анықталған.
 4. Сандық әдістерге негіз: FEM, Galerkin әдістері әлсіз шешімге сүйенеді.
-

1. Мәселенің қойылымы

Домен $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ үшін толқын теңдеуі:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

- u_0, v_0 – бастапқы шарттар
- $f(x, t)$ – көз функциясы
- $u(x, t)$ – шешім

Шекаралық шарт: Дирихле типі (0 мәні).

2. Әлсіз шешімнің анықтамасы

Функция $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ және $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ әлсіз шешім деп аталады, егер барлық тест функциялары $v \in H_0^1(\Omega)$ үшін:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(x, t)v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) dx$$

- Бұл формула интегралдық түрде толқын теңдеуінің слабая (weak) формасы болып табылады.
-

3. Вариациялық формула (weak formulation)

- Әлсіз шешім $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ ізделеді, осылайша:

$$(u_{tt}(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(t), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad t \in (0, T)$$

- Бастапқы шарттар:

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = v_0$$

- Мұндағы $(\cdot, \cdot) - L^2(\Omega)$ скалярлық көбейтіндісі.
-

4. Әлсіз шешімнің қасиеттері

1. Уникалдық: Әлсіз шешім бірегей.
2. Тұрақтылық (Energy estimate):

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

$$E(t) \leq C(\|u_0\|_{H_0^1}^2 + \|v_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2}^2 ds)$$

- Бұл энергия теңдеудің физикалық интерпретациясына сай келеді.
3. Линиялықдық: f сызықтық болса, u де сызықтық.
 4. Слабы туындылар арқылы анықтылық: u_{tt} классикалық түрде болмауы мүмкін, бірақ әлсіз формула арқылы анықталады.